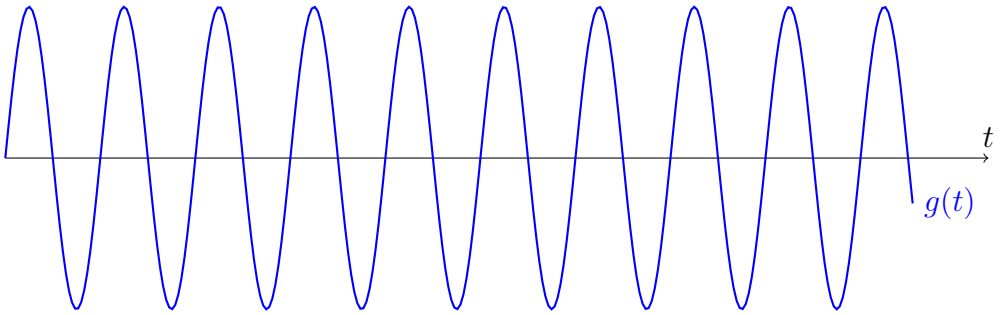
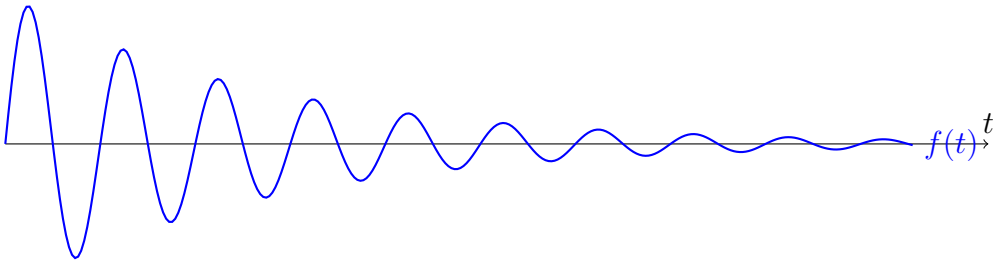
Die Mathematik kurzer Töne

1 Kurz abklingende Töne

Wir vergleichen den durchgehaltenen Ton $g(t) = \sin(\omega_0 t)$



mit dem abklingenden Ton $f(t) = e^{-\frac{t}{T}} \cdot \sin(\omega_0 t)$ für $t >= 0$ und $f(t) = 0$ für $t < 0$. Nach der Zeit T verringert sich also die Amplitude um den Faktor $\frac{1}{e}$



und wir fragen uns nach seinem Spektrum. Dieses Modell ist passend für gezupfte oder angeschlagene Instrumente (Gitarre, Klavier, etc.)

Im Fall der Funktion g ist die Frage sofort zu beantworten, es kommt nur die Frequenz $\omega = \omega_0$ vor und die Amplitude aller anderen Frequenzen ist identisch Null.

Wir wenden uns nun der Funktion f zu. Um ihr Spektrum $\hat{f}$ zu berechnen, müssen wir ihre Fourier-Transformierte $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i \cdot \omega t} \cdot dt$ ermitteln. Wir verwenden dazu die Eulersche Identität $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

$$e^{-\frac{t}{T}} \sin(\omega_0 t) e^{-i\omega_0 t} = \frac{1}{2i} \left[e^{-(\frac{1}{T} - i\omega_0 + i\omega)t} + e^{-(\frac{1}{T} + i\omega_0 + i\omega)t} \right]$$

Damit haben wir zwei Integranden vom Typ $e^{-\alpha t}$. Es gilt

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} dt = \left[\frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha} \right]_0^{\infty} = \left[\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha} \right]_{\infty}^{0} = \frac{1}{\alpha}$$

Es gilt daher

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{\frac{1}{T} - i\omega_0 t + i\omega} - \frac{1}{\frac{1}{T} + i\omega_0 + i\omega} \right]$$

Elementare algebraische Umformungen führen nun zu

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\omega_0}{(\frac{1}{T} + i\omega)^2 + \omega_0^2}}$$

Wenn wir die Abklingzeit so kurz wählen, dass $\frac{1}{T} \gg \omega$, gilt

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\omega_0}{\frac{1}{T^2} + \omega_0^2} \textbf{ für } \frac{1}{T} \gg \omega$$

Damit haben wir ein konstantes Spektrum, welches alle Frequenzen ω in gleicher Intensität enthält. Wir hören nur einen Knacks, dem wir keinerlei Frequenz zuordnen können.

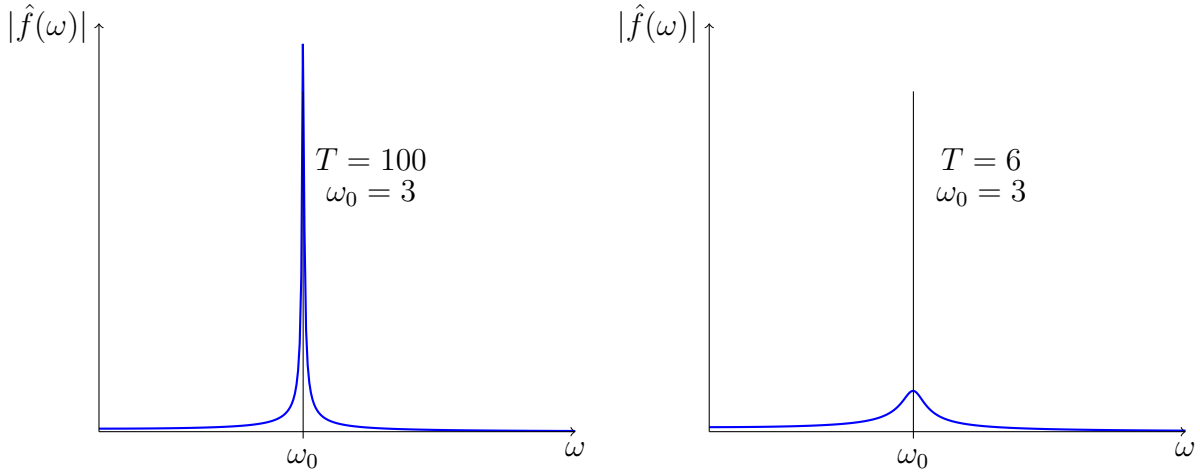
Wählen wir dagegen T so groß, dass $\frac{1}{T} \ll \omega$, erhalten wir das Spektrum

$$|\hat{f}(\omega)| = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\omega_0}{|\omega_0^2 - \omega^2|} \textbf{ für } \frac{1}{T} \ll \omega$$

und erhalten eine Polstellen bei $\omega = \pm\omega_0$, d.h. wir hören nur die Frequenz ω_0.

Um den Zwischenbereich abzudecken, berechnen wir $|\hat{f}(\omega)| = \sqrt{\hat{f}(\omega)\overline{\hat{f}(\omega)}}$. Eine einfache elementare Umformung liefert

$$\boxed{|\hat{f}(\omega)| = \frac{\omega_0}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{T^2} + \omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{2\omega}{T}\right)^2}}}$$



Die graphische Darstellung zweier Spektren die zur gleichen Grundfrequenz ω_0 gehören, jedoch mit unterschiedlicher Abklingdauer, unterscheiden sich deutlich. Lange Abklingdauern ergeben hohe schmale Linien, während bei kurzer Abklingdauer das Spektrum niedriger und breiter wird.

Nun wollen wir die Lage des Extremums des Spektrums ermitteln. Dazu genügt es, den Term unter der Wurzel zu betrachten und dessen Extremum zu ermitteln. Wir leiten diesen Term ab und setzen ihn gleich Null.

$$-2\omega \cdot 2(\frac{1}{T^2} + \omega_0^2 - \omega^2) + 2\frac{2\omega}{T} \cdot \frac{2}{T} = 0$$

oder

$$-4\omega\left[\omega_0^2-\omega^2-\frac{1}{T^2}\right]=0$$

Damit haben wir

$$\boxed{\omega_{max}=\sqrt{\omega_0^2-\frac{1}{T^2}}}$$

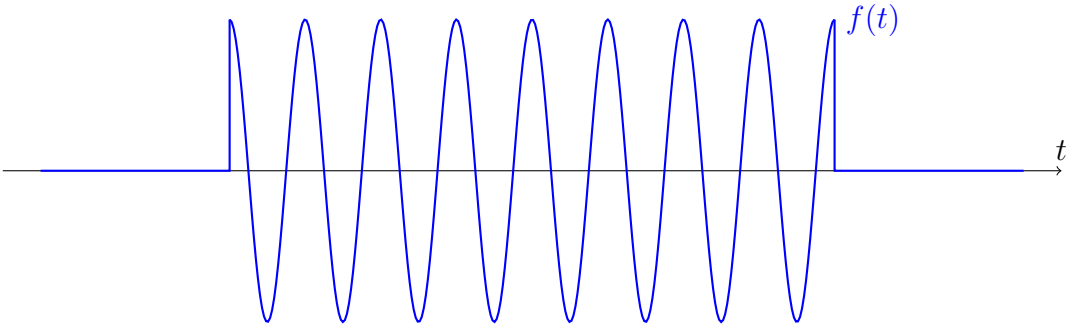
Die Frequenz des abklingenden Tons ist also nach unten verschoben. Je schneller der Ton abklingt, desto größer die Frequenzverschiebung nach unten und gleichzeitig wird der Ton in seiner Frequenz unschärfer.

2 Kurze ungedämpfte Töne

Für Streichinstrumente oder Blasinstrumente ist das Modell endlicher ungedämpfter Wellenzüge besser geeignet. Wir betrachten den kurzen Ton der Dauer T

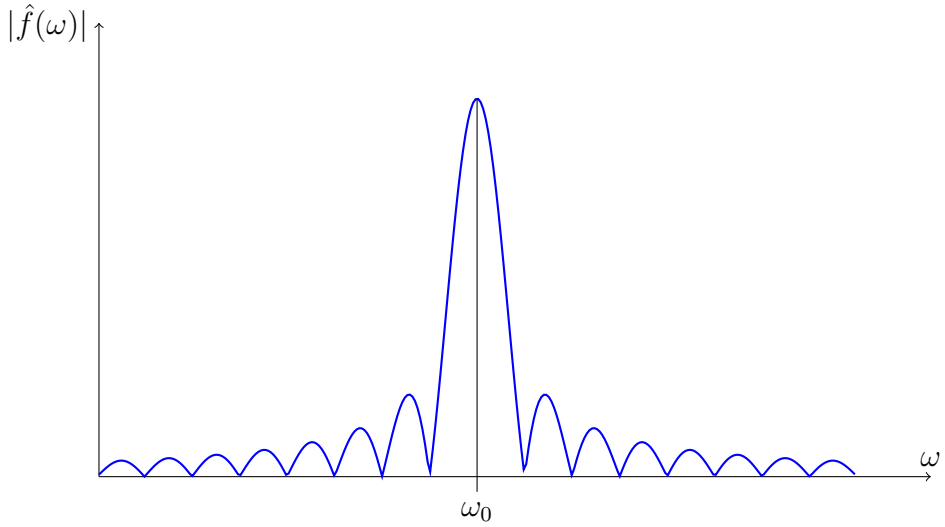
$$f(x)=\begin{cases}e^{i\omega_0 t} & \text{für } -\frac{T}{2}\le t\le\frac{T}{2}\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

in seiner komplexen Form, um die Rechnung möglichst einfach zu halten.



Wir berechnen nun wiederum die Fourier-Transformierte von f.

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}e^{i\omega_0 t}e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}e^{i(\omega_0-\omega)t}dt=\frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{i(\omega_0-\omega)t}}{2i(\omega_0-\omega)}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin((\omega_0-\omega)\frac{T}{2})}{(\omega_0-\omega)}$$



Das Spektrum sieht wie oben dargestellt aus. Bei $\omega = \omega_0$ erhalten wir ein Maximum. Bei $\omega_n = \omega_0 + \frac{2\pi}{T}n$ mit $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ erhalten wir im Spektrum Nullstellen. Wir haben also ein hohes Frequenzmaximum bei $\omega = \omega_0$ und niedrige Nebenmaxima bei

$$\omega = \omega_0 \pm \frac{\pi}{T}(2n+1) \textbf{ mit } n \in \mathbb{N}$$

Das Haupt-Maximum bei hat dann die Breite

$$\Delta\omega = \frac{4\pi}{T}$$

Wenn wir dies in Frequenz umrechnen, erhalten wir

$$\Delta f = \frac{2}{T}$$

Wenn ein Ton z.B. nur $\frac{1}{4}s$ gehalten wird, haben wir eine Frequenzunschärfe von immerhin $8Hz$. Wir der Ton nur $\frac{1}{8}s$ gehalten, wächst die Frequenzunschärfe auf $16Hz$ an. Je kürzer der Ton, desto größer die Frequenzunschärfe!