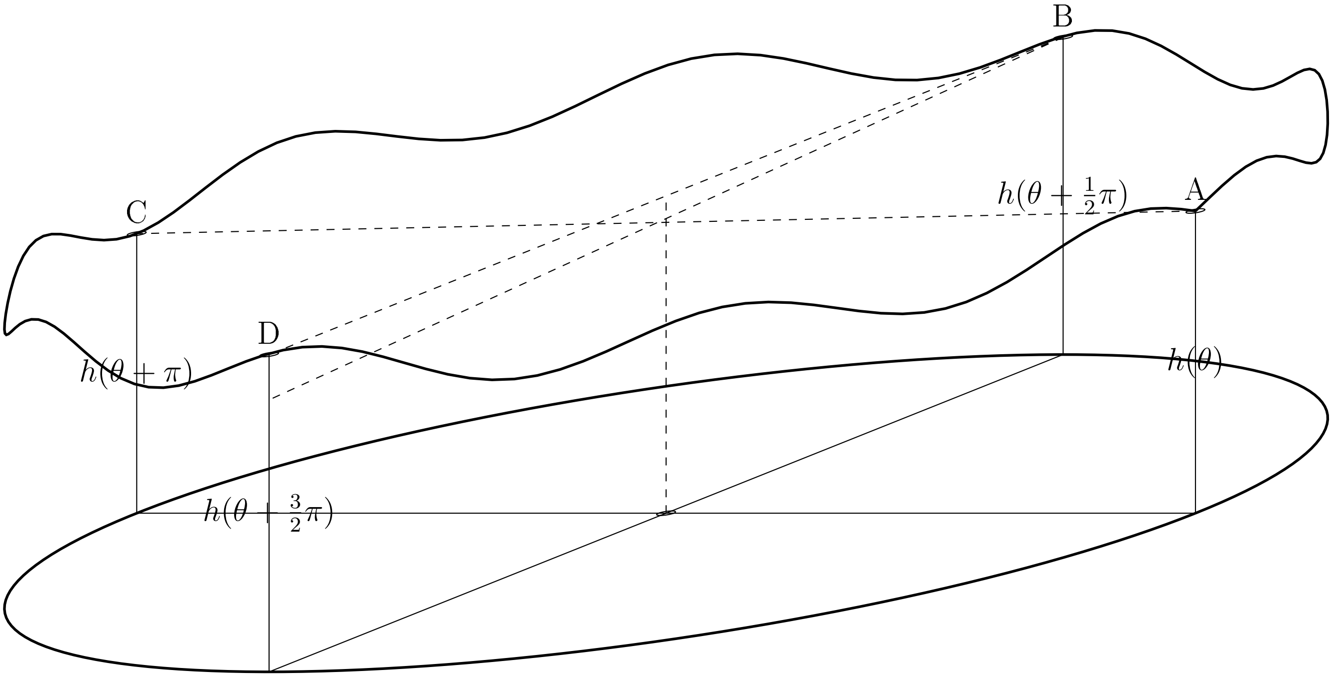
Mathematik im Biergarten



Ein quadratischer Bier-Tisch steht in den Punkten A, B, C in wackliger Position, d.h. er steht auf drei Beinen, während das vierte Bein D in der Luft oder im Boden versenkt ist. Die Höhe des Mittelpunkts der Strecke $[AC]$ ist $\frac{1}{2}(h(\theta)+h(\theta+\pi))$ und die Höhe des Mittelpunkts der Strecke $[BD]$ ist $\frac{1}{2}(h(\theta+\frac{1}{2}\pi)+h(\theta+\frac{3}{2}\pi))$. Das Viereck $ABCD$ ist genau dann eben, wenn diese beiden Höhen übereinstimmen. In diesem Fall steht der Tisch stabil. Wir betrachten also die Funktion

$$f(\theta) = h(\theta) - h(\theta + \frac{1}{2}\pi) + h(\theta + \pi) - h(\theta + \frac{3}{2}\pi)$$

Mit dem Strahlensatz sieht man sofort, dass $f(\theta)$ die Tiefe des vierten Beins im Untergrund ist. Wenn f negativ ist, ist das vierte Bein über dem Untergrund.

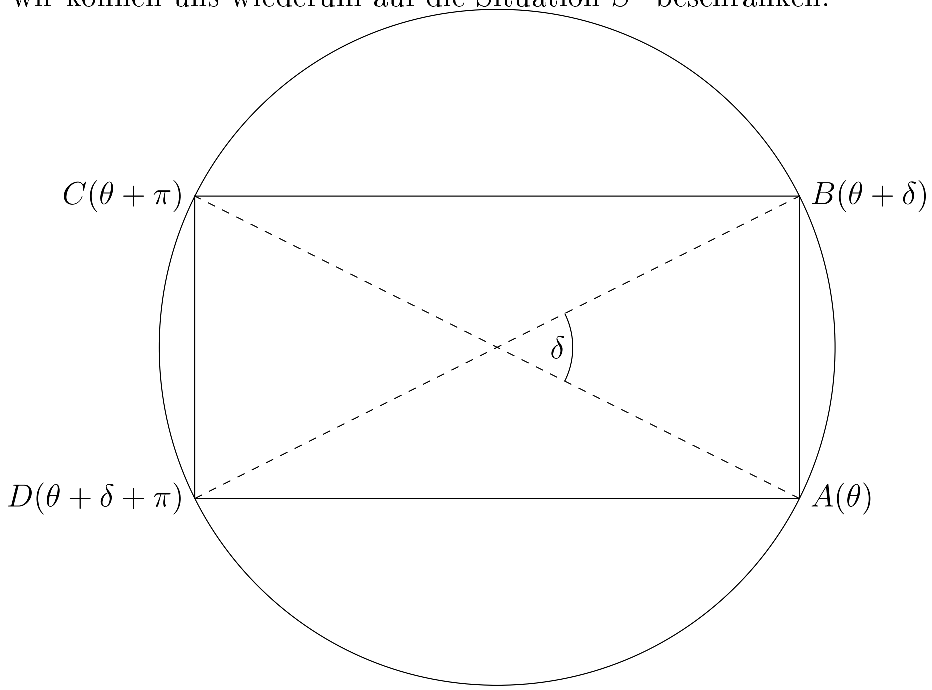
Wir berechnen nun

$$\begin{aligned} f(\theta + \frac{1}{2}\pi) = &\ h(\theta + \tfrac{1}{2}\pi) - h(\theta + \pi) + h(\theta + \tfrac{3}{2}\pi) - h(\theta + 2\pi) = \\ = &\ h(\theta + \tfrac{1}{2}\pi) - h(\theta + \pi) + h(\theta + \tfrac{3}{2}\pi) - h(\theta) = \\ = &\ -h(\theta) + h(\theta + \tfrac{1}{2}\pi) - h(\theta + \pi) + h(\theta + \tfrac{3}{2}\pi) = \\ = &\ -f(\theta) \end{aligned}$$

Wenn der Untergrund stetig ist, ist auch die Funktion h stetig und damit auch die Funktion f stetig. Wenn wir nun annehmen, $f(0) > 0$ gilt $f(\frac{1}{2}\pi) < 0$ und umgekehrt. Dann gibt es aber einen Winkel $\varphi \in [0, \frac{1}{2}\pi]$ mit $f(\varphi) = 0$, d.h. nach einer Drehung um φ steht der Tisch stabil.

Lehrsatz 1: Jeder quadratische Tisch kann nach einer Drehung um höchstens 90° in eine stabile Lage gebracht werden.

Unser ehemalige Kollege M.D. wies völlig zurecht darauf hin, dass quadratische Biertische außerordentlich selten sind und das Resultat daher völlig nutzlos sei. Wir untersuchen also jetzt den wichtigeren Fall eines rechteckigen Biertisches. Auch der rechteckige Biertisch besitzt einen Umkreis und wir können uns wiederum auf die Situation S^1 beschränken.



Die Überlegungen lassen sich vom quadratischen Biertisch auf den den rechteckigen Biertisch sinngemäß übertragen und wir untersuchen statt dessen die Funktion

$$f(\theta) = h(\theta) - h(\theta+\delta) + h(\theta+\pi) - h(\theta+\delta+\pi)$$

wobei $h(\theta)$ wiederum die Höhe des Untergrundes in Abhängigkeit des Richtungswinkels θ ist. Der Symmetrie-Trick funktioniert nicht mehr und wir müssen härtere Geschosse anwenden.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(\theta)d(\theta) &= \int_0^{2\pi} h(\theta)d\theta - \int_0^{2\pi} h(\theta+\delta)d\theta + \int_0^{2\pi} h(\theta+\pi)d\theta - \int_0^{2\pi} h(\theta+\delta+\pi)d\theta \\ &= H - H + H - H = 0\end{aligned}$$

Dieses Resultat wird durch die Periodizität von h ermöglicht. Wäre immer $f(\theta) > 0$ oder $f(\theta) < 0$ wäre $\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta$ entweder größer Null oder kleiner Null. Es gibt also einen Winkel $\phi \in [0, 2\pi]$, für den gilt $f(\phi) = 0$, d.h. es gibt eine stabile Lage für den Biertisch. Da man einen Biertisch linksherum oder rechtsherum drehen kann, genügt eine Drehung um maximal 180°. Die Drehrichtung wird ein experimentierfreudiger Biertisch-Besucher ohne weiteres herausfinden, da er ohnehin ein gewisses Drehmoment besitzt.

Lehrsatz 2: Auch Biertische können stabil postiert werden. Es genügt eine Drehung von höchstens 180°. Die Rotationsrichtung muss aber experimentell ermittelt.

Korrolar 1: Bierfreunde sollten sich an quadratischen Bier-Bänken einfinden, da sich das Ermitteln einer stabilen Lage des Biertisches leichter realisieren lässt.

Unser ehemaliger Kollege M.D. wies völlig zu unrecht darauf hin, dass wackelfreie schiefe Bier-Tische nutzlos seien. Dazu berechnen wir die Wahrscheinlichkeit an einem horizontalen Biertisch zu sitzen. Die geforderte Menge an Normalenvektoren ist einelementig und daher vom Lebesgue-Maß 0. Das Lebesgue-Maß der Kugel S^2 ist dagegen 4π. Die Wahrscheinlichkeit an einem horizontalen Tisch zu sitzen, ist folglich $\frac{0}{4\pi} = 0$ und damit sitzt man mit Wahrscheinlichkeit 1 an einem schiefen Tisch. Unser Kollege saß also mit der Wahrscheinlichkeit 1 an einem schiefen Biertisch, der hoffentlich nach einer Rotation stabil stand. Hier hilft nur noch der Appell an den gesunden Menschenverstand. Wir stellen uns eine Ebene $E : \vec{n} \circ \vec{x} = 0$ mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\pi/3) \\ \sin(\pi/3) \end{pmatrix}$ vor. Nun können wir den Tisch drehen, sogar beliebig verschieben, es wird sich keine horizontale Lage finden lassen, da bei Stabilität der Normalenvektor des Tisches mit dem Normalenvektor der Ebene übereinstimmen muss.

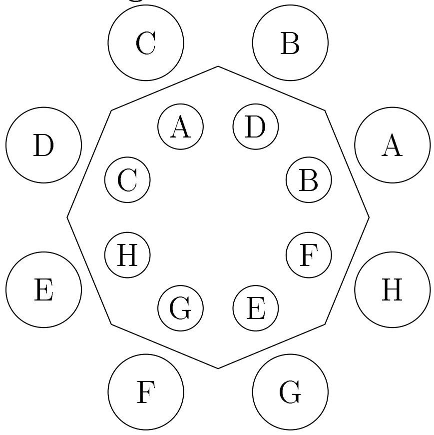
Wenn der Untergrund die Sphäre S^2 ist, gibt es genau zwei Punkt $x_0, x_1 \in S^2$ an denen der Tisch stabil und horizontal ist, vorausgesetzt, der Tisch ist klein genug. An jeder anderen Stelle $x \in S^2 \backslash \{x_0, x_1\}$ ist dies hingegen schon nicht mehr möglich. Es gibt also interessanterweise tatsächlich Flächen, die einen waagrechten nicht wackelnden Tisch an zwei Stellen erlauben. In der realen Welt ist dies jedoch im allgemeinen nicht möglich, wie uns das erste Beispiel lehrt.

Lehrsatz 3: In der realen Welt stehen wackelnde und nicht wackelnde Biertische mit der Wahrscheinlichkeit 1 schief.

Anmerkung: Der ehemalige Kollege M.D. soll mir erst einmal beweisen, dass er jemals an einem waagrechten Biertisch gesessen ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist jedenfalls Null und jeder mathematisch denkende Besucher eines Biergartens wird mir recht geben, dass nicht wackelnde Biertische wackelnden Biertischen vorzuziehen sind und daher nicht nutzlos sind. Ob dies Urteil vernünftig ist, ist eine philosophische Frage, die Mathematiker nichts angeht.

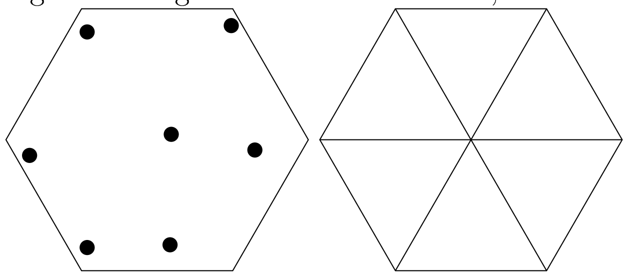
Wir platzieren fünf Biergärten auf der Erdkugel. Durch zwei der Biergärten legen wir einen Großkreis. Dieser unterteilt die Erdkugel in zwei Hemisphären. Von den verbliebenen 3 Biergärten müssen zwei in einer der beiden Hemisphären sein. Damit haben wir vier Biergärten in einer abgeschlossenen Hemisphäre. Wir erhalten also folgendes bemerkenswerte Resultat:

Lehrsatz 4: Von fünf beliebig auf der Erde platzierten Biergärten sind 4 Biergärten in einer abgeschlossenen Hemisphäre.



Lehrsatz 5: An einem regulären oktogonalen Biertisch mit Platzreservierung sitzen 8 Biergartenbesucher, aber jeder auf dem falschen Platz. Dann ist es möglich, den Tisch so zu rotieren, dass wenigstens zwei Biergartenbesucher an ihrem richtigen Platz sind.

Beweis: Wir berechnen für jeden Biergartenbesucher seinen Positionsabstand zu seiner Platzkarte bei einer Rotation im mathematischen positiven Drehsinn aus. Da jeder auf einem falschen Platz sitzt, kommen nur die Werte 1,2,...,7 in Frage. Da es aber 8 Personen sind, müssen 2 dieselbe Entfernung zu ihrer Platzkarte haben. Nun führen wir diese Rotation aus und diese beiden Personen sitzen nun richtig. Allerdings ist es wahrscheinlich, dass der Biertisch nun wackelt.



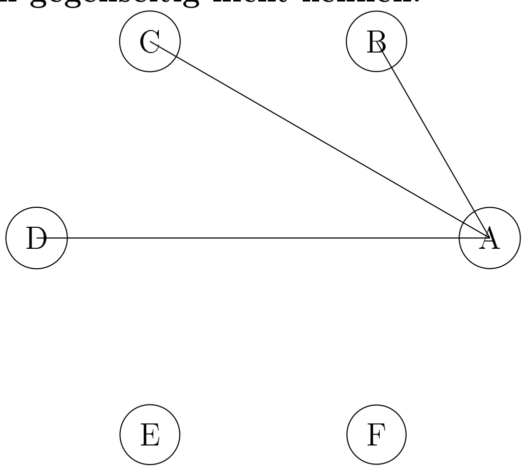
Lehrsatz 6: Auf einem regulären hexagonalen Biertisch der Seitenlänge 1 werden 7 Maßkrüge abgestellt. Dann gibt es zwei Maßkrüge, deren Abstand höchstens 1 beträgt.

Beweis: Wir unterteilen den Biertisch in sechs gleichseitige Dreiecke der Seitenlänge 1. Wenn wir die 7 Maßen abstellen, müssen mindestens 2 Maßen in einem der Dreiecke landen. Dann ist ihr Abstand aber höchstens 1.

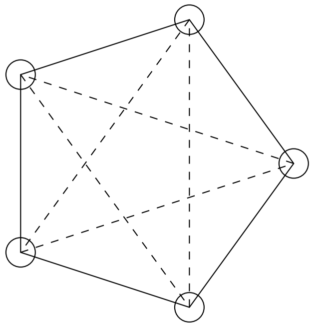
Korollar: Werden auf dem regulärem hexagonalen Biertisch $6 \cdot 4^n + 1$ **Maßkrüge abgestellt, ist der minimale Abstand zweier Maßkrüge höchstens** $\frac{1}{2^n}$**.**

Beweis: Diese triviale Folgerung wird dem geneigten Leser als einfache Übung überlassen.

Lehrsatz 7: Sechs Personen sitzen an einem Biertisch. Entweder gibt es unter diesen Personen mindestens drei, die sich gegenseitig kennen, oder es gibt mindestens 3, die sich gegenseitig nicht kennen.



Beweis: Wir bezeichnen die Biertrinker mit A, B, C, D, E, F und identifizieren sie als Knoten eines Graphen. Die Beziehungen zwischen den Biertrinkern beschreiben wir durch Färbung der Verbindungskanten. Rot steht für bekannt und Blau für unbekannt. Unter den 5 Verbindungskanten von A mit dem Rest sind mindestens 3 von der selben Farbe. O.B.d.A. seien die Kanten rot. O.B.d.A. seien die Enden der roten Kanten B, C, D. Wenn mindestens eine der Kanten BC, BD, CD rot ist, haben wir mindestens ein rotes Dreieck fabriziert. Andernfalls sind alle Kanten BC, BD, CD blau einzufärben und wir haben ein blaues Dreieck fabriziert. q.e.d.



Bei fünf Biertrinkern kann eine solche Aussage nicht gemacht werden, wie der obige Graph zeigt. Keine drei kennen sich gegenseitig und keine drei kennen sich nicht gegenseitig.