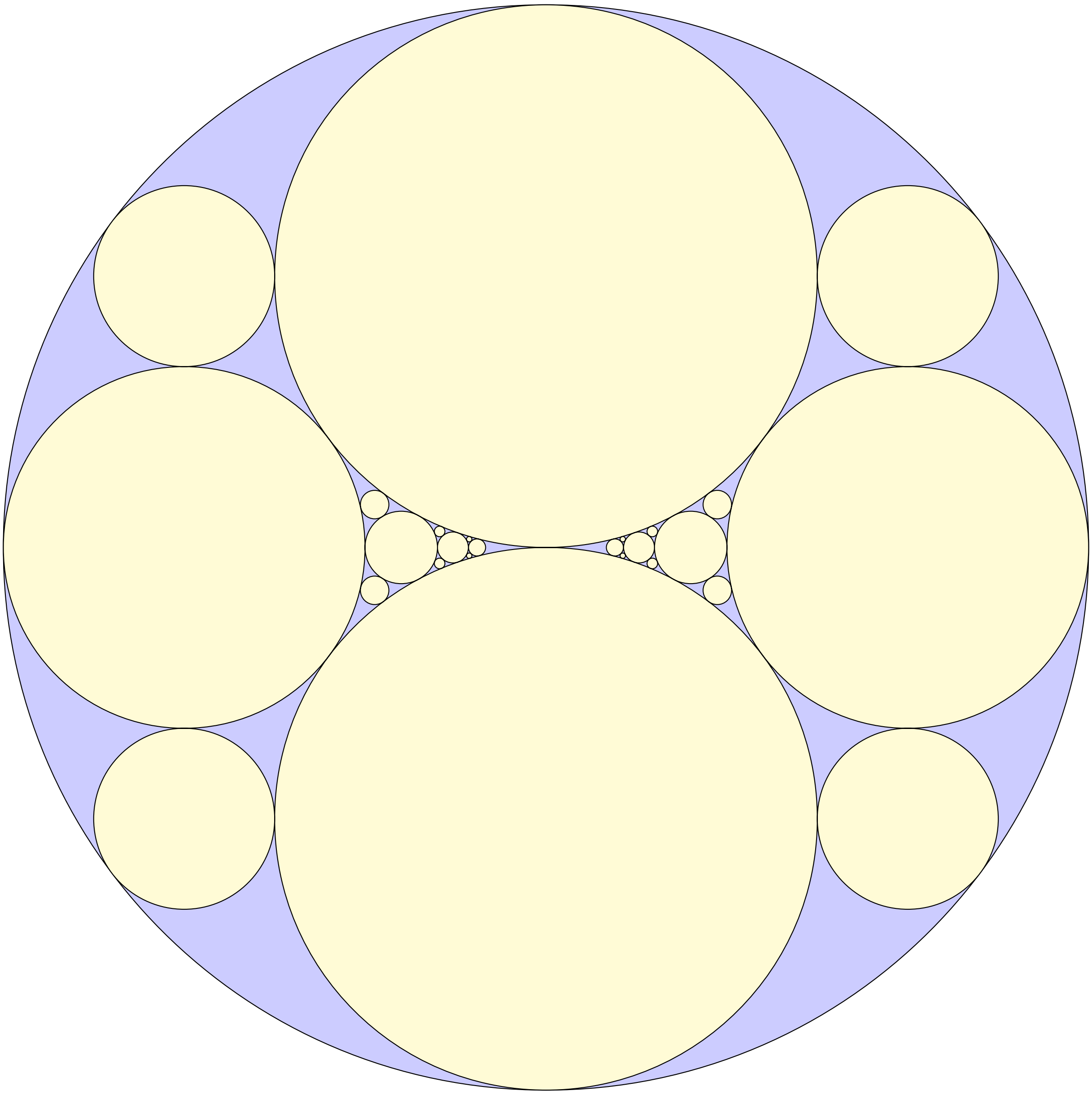
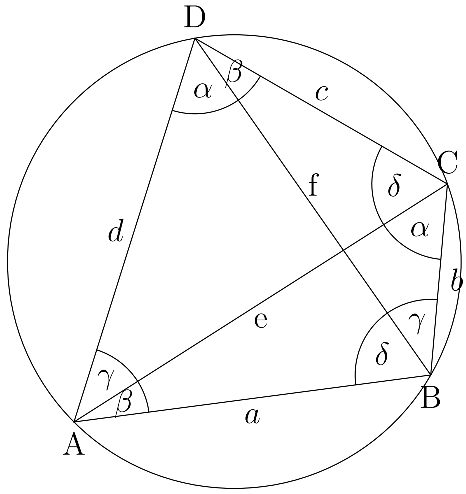
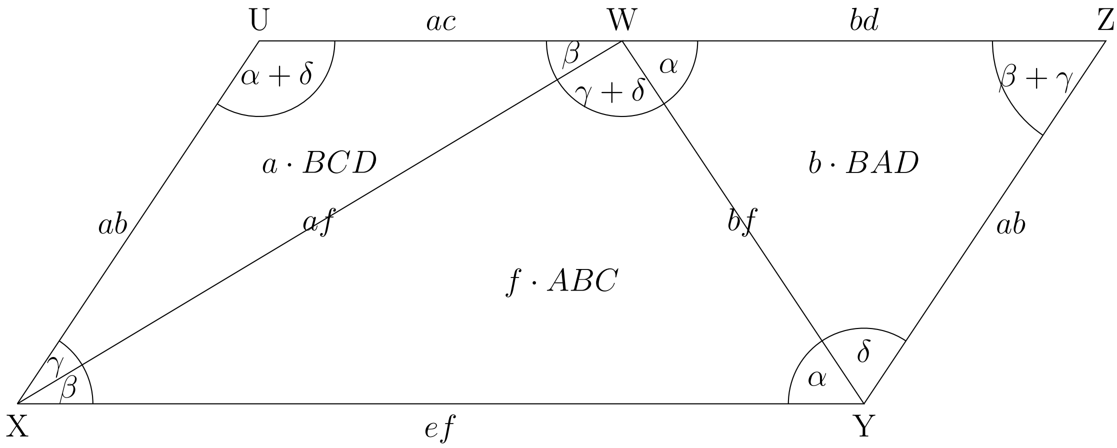
# Tempel-Theorie



In japanischen Shinto- und Buddha-Tempeln finden sich Holztafeln aus der „abgeschotteten“ Edo-Zeit 1603–1867 mit mathematischen Problemen, die *San Gaku* genannt werden. Wörtlich übersetzt sind dies *Mathematische Tafeln*, praktisch sind dies kunstvoll bemalte Holztafeln. Sie galten als intellektuelle Herausforderung und wurden zur Ausbildung der *Samurai* genutzt. Diese Bilder haben einen meditativen Aspekt, denn man findet nur dann eine Lösung, wenn man sich in diese Bilder wirklich versenkt, lange hinsieht und die Gedanken nicht schweifen lässt!

# 1 Der Satz von Ptolemaios

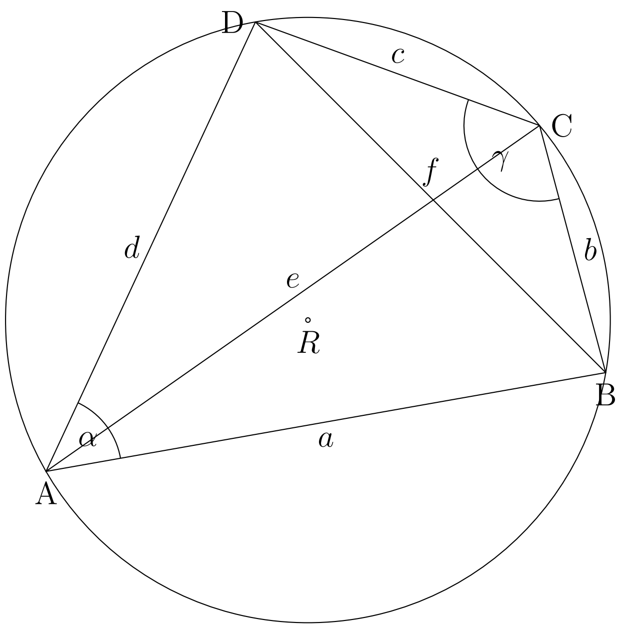



Wir legen gestreckte Kopien der Dreiecke BCD, ABC und BAD nebeneinander und erhalten ein Parallelogramm. Nun kann man die Beziehung (Satz von Ptolemaios)

$$\boxed{ef = ac + bd}$$

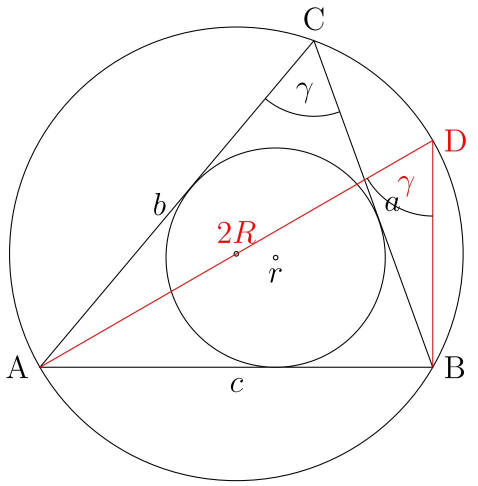
sofort ablesen.

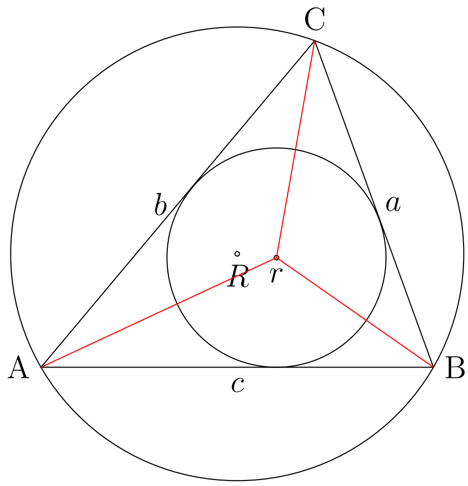



Für die Fläche $A$ des Sehnenvierecks ABCD gilt $A = \frac{1}{2}ad\sin(\alpha) + \frac{1}{2}bc\sin(\gamma)$. Nun ergänzen $\alpha$

und $\gamma$ zu 180° und es gilt daher $\sin(\alpha) = \sin(\gamma)$ und wir erhalten $A = \frac{1}{2}(ad+bc)\sin(\alpha)$. Analog erhalten wir $A = \frac{1}{2}(ab+cd)\sin(\beta)$. Weiter gilt $R = \frac{afd}{4A_{ABD}} = \frac{afd}{4 \cdot \frac{1}{2}ad\sin(\alpha)} = \frac{f}{2\sin(\alpha)}$ und wir erhalten $\sin(\alpha) = \frac{f}{2R}$. Analog erhalten wir $\sin(\beta) = \frac{e}{2R}$. Wir setzen dies in die Flächenformeln ein und erhalten $A = \frac{1}{2}(ad+bc)\frac{f}{2R} = \frac{1}{2}(ab+cd)\frac{e}{2R}$. Es gilt also $\boxed{f(ad+bc) = e(ab+cd)}$.

## 2 Der Satz von Descartes

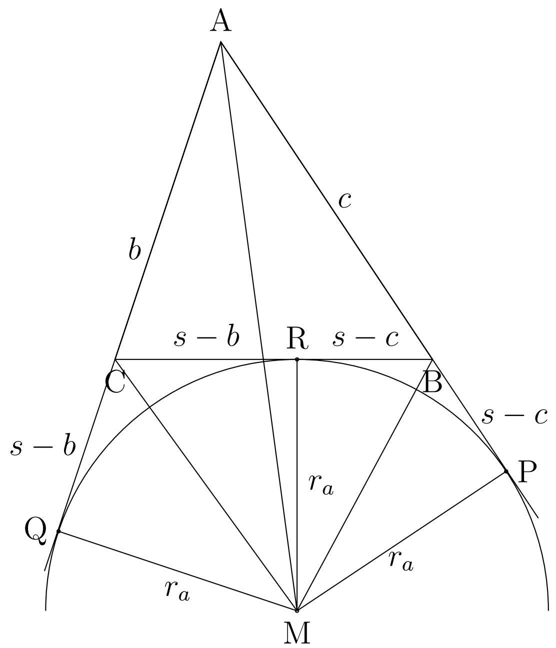


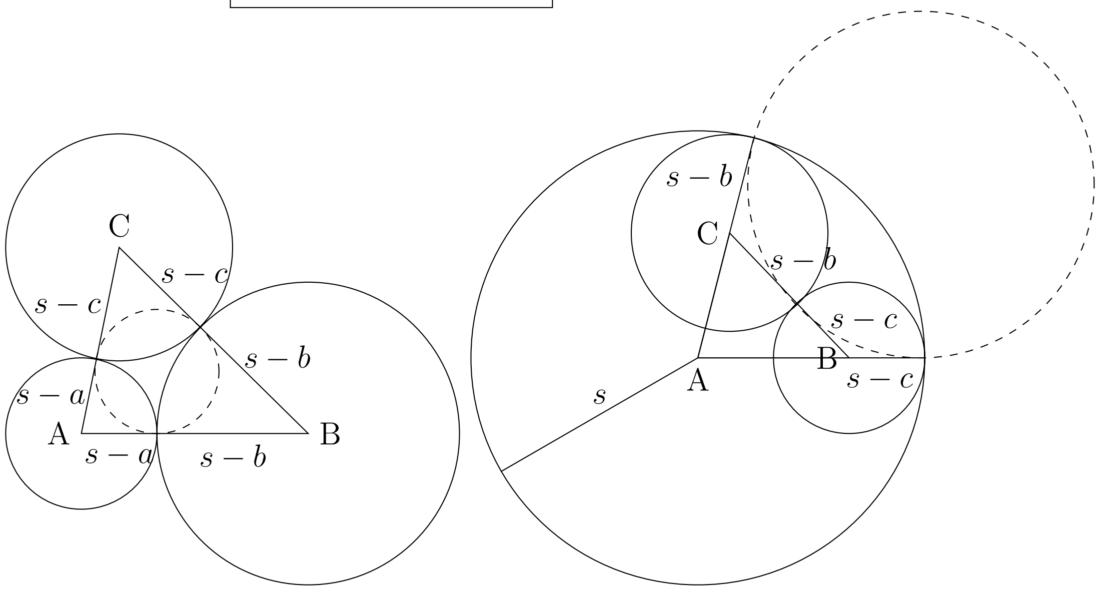

Es gilt $\sin(\gamma) = \frac{c}{2R}$. Die Fläche $A$ des Dreiecks ABC ist $A = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma) = \frac{abc}{4R}$. Damit finden wir für den Umkreisradius $\boxed{R = \frac{abc}{4A}}$.

Die Fläche $A$ des Dreiecks ABC kann aber auch folgendermaßen berechnet werden: $A = \frac{1}{2}(a+b+c)r$. Mit der Abkürzung $\boxed{s = \frac{1}{2}(a+b+c)}$ gilt also $\boxed{r = \frac{A}{s}}$ für den Inkreisradius.

Die Fläche $A$ können wir mit dem Satz von Heron berechnen als $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. Damit gilt für den Inkreisradius $\boxed{r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}}$.




Es gilt $MAC = \frac{1}{2}br_a$, $MAB = \frac{1}{2}cr_a$ und $MBC = \frac{1}{2}ar_a$. Damit erhalten wir $\frac{1}{2}br_a + \frac{1}{2}cr_a - \frac{1}{2}ar_a = \frac{1}{2}(b+c+a-2a)r_a = (s-a)r_a = A$. Für den Radius $r_a$ des Ankreises an die Seite $a$ gilt also $\boxed{r_a = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}}$. Für die anderen Seiten gelten analoge Formeln.




Im Fall, dass sich die Kreise um A, B und C von außen berühren ist der Kreis durch die Berührpunkte ein Innenkreis, und im Fall einer Berührung von innen ist der Kreis durch die Berührpunkte ein Ankreis.

**Definition:** Unter der Krümmung $k$ eines Kreises mit Radius $r$ versteht man den Kehrwert des Radius d.h. $\boxed{k = \frac{1}{r}}$. Unter der Vorzeichen-Krümmung verstehen wir $\boxed{\hat{k} = \pm\frac{1}{r}}$, wobei das negative Vorzeichen genau dann steht, wenn der Kreis zwei andere Kreise beinhaltet, ansonsten steht das positive Vorzeichen. Der Sinn der Unterscheidung wird erst im Beweis des Satzes von Descartes klar.

**Der Satz von Descartes:** Wenn sich vier Kreise $K_1$, $K_2$, $K_3$ und $K_4$ gegenseitig berühren, gilt die Beziehung $\boxed{2(\hat{k}_1^2 + \hat{k}_2^2 + \hat{k}_3^2 + \hat{k}_4^2) = (\hat{k}_1 + \hat{k}_2 + \hat{k}_3 + \hat{k}_4)^2}$.

**Beweis:** Wir wählen drei Kreise aus, also zum Beispiel $K_2$, $K_3$ und $K-4$ und legen durch deren Berührpunkte einen weiteren Kreis. Wir setzen $s-a = r_2$, $s-b = r_3$ und $s-c = r_4$.

Wenn sich die drei Kreise von außen her berühren, gilt für dessen Radius $\rho_1 = \sqrt{\frac{r_2r_3r_4}{r_2+r_3+r_4}}$ und für die Krümmung $\kappa_1$ gilt dann $\kappa_1^2 = \frac{r_2+r_3+r_4}{r_2r_3r_4} = \frac{1}{r_3r_4} + \frac{1}{r_2r_4} + \frac{1}{r_2r_3} = k_2k_3 + k_2k_4 + k_3k_4$.

Wenn ein Kreis die beiden anderen beinhaltet, zum Beispiel beinhalte $K_2$ die Kreise $K_3$ und $K_4$, können wir setzen $s = r_2$, $s-c = r_3$ und $s-b = r_4$. Man überlegt sich sofort, dass $s-a = r_2 - r_3 - r_4$ gilt. Damit erhalten wir $\rho_1 = \sqrt{\frac{r_2r_3r_4}{r_2-r_3-r_4}}$ oder $\kappa_1^2 = k_3k_4 - k_2k_4 - k_2k_3$. Nach der Definition der Vorzeichen-Krümmung gilt wieder $\kappa_1^2 = \hat{k}_2\hat{k}_3 + \hat{k}_2\hat{k}_4 + \hat{k}_3\hat{k}_4$, da im ersten Fall ja galt $\hat{k}_i = k_i$. Für vier Kreise sich berührende erhalten wir daher das folgende Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\hat{\kappa}_1^2 &= \hat{k}_2\hat{k}_3 + \hat{k}_2\hat{k}_4 + \hat{k}_3\hat{k}_4 \\
\hat{\kappa}_2^2 &= \hat{k}_1\hat{k}_3 + \hat{k}_1\hat{k}_4 + \hat{k}_3\hat{k}_4 \\
\hat{\kappa}_3^2 &= \hat{k}_1\hat{k}_2 + \hat{k}_1\hat{k}_4 + \hat{k}_2\hat{k}_4 \\
\hat{\kappa}_4^2 &= \hat{k}_1\hat{k}_2 + \hat{k}_1\hat{k}_3 + \hat{k}_2\hat{k}_3
\end{aligned}$$

Nun müssen dieselben Beziehungen aber auch für die vier Kreise durch die Berührepunkte gelten, da sie sich gegenseitig berühren und wir erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\hat{k}_1^2 &= \hat{\kappa}_2\hat{\kappa}_3 + \hat{\kappa}_2\hat{\kappa}_4 + \hat{\kappa}_3\hat{\kappa}_4 \\
\hat{k}_2^2 &= \hat{\kappa}_1\hat{\kappa}_3 + \hat{\kappa}_1\hat{\kappa}_4 + \hat{\kappa}_3\hat{\kappa}_4 \\
\hat{k}_3^2 &= \hat{\kappa}_1\hat{\kappa}_2 + \hat{\kappa}_2\hat{\kappa}_4 + \hat{\kappa}_2\hat{\kappa}_4 \\
\hat{k}_4^2 &= \hat{\kappa}_1\hat{\kappa}_2 + \hat{\kappa}_1\hat{\kappa}_3 + \hat{\kappa}_2\hat{\kappa}_3
\end{aligned}$$

Es gilt auf jeden Fall $\sum\limits_i \hat{k}_i,\ \sum\limits_i \hat{\kappa}_i > 0$. Es gilt $(\sum\limits_i \hat{k}_i)^2 = \sum\limits_i \hat{k}_i^2 + \sum\limits_i \hat{\kappa}_i^2 = (\sum\limits_i \hat{\kappa}_i)^2$ und daher $\sum\limits_i \hat{k}_i = \sum\limits_i \hat{\kappa}_i$. Es gilt $-\hat{k}_1^2 + (\hat{k}_2 + \hat{k}_3 + \hat{k}_4)^2 = -\hat{k}_1^2 + \hat{k}_2^2 + \hat{k}_3^3 + \hat{k}_4^2 + 2\hat{\kappa}_1^2 = 2\hat{\kappa}_1(\hat{\kappa}_1 + \hat{\kappa}_2 + \hat{\kappa}_3 + \hat{\kappa}_4) = 2\hat{\kappa}_1(\hat{k}_1 + \hat{k}_2 + \hat{k}_3 + \hat{k}_4)$. Die dritte binomische Formel liefert nun $-\hat{k}_1 + \hat{k}_2 + \hat{k}_3 + \hat{k}_4 = 2\hat{\kappa}_1$. Damit haben wir folgendes System

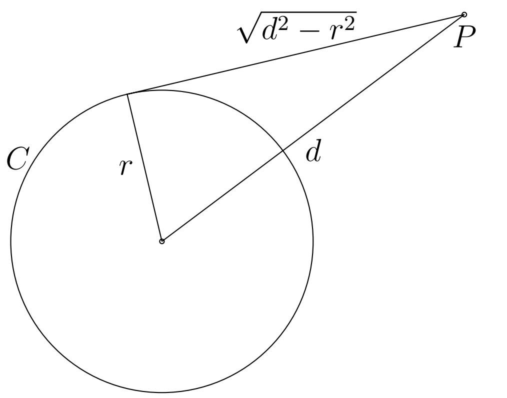
$$\begin{aligned}
-\hat{k}_1 + \hat{k}_2 + \hat{k}_3 + \hat{k}_4 &= 2\hat{\kappa}_1 \\
+\hat{k}_1 - \hat{k}_2 + \hat{k}_3 + \hat{k}_4 &= 2\hat{\kappa}_2 \\
+\hat{k}_1 + \hat{k}_2 - \hat{k}_3 + \hat{k}_4 &= 2\hat{\kappa}_3 \\
+\hat{k}_1 + \hat{k}_2 + \hat{k}_3 - \hat{k}_4 &= 2\hat{\kappa}_4
\end{aligned}$$

Wir quadrieren diese Gleichungen und addieren sie, um $\sum\limits_i \hat{k}_i^2 = \sum\limits_i \hat{\kappa}_i^2$ zu erhalten. Schließlich gilt $2\sum\limits_i \hat{k}_i^2 = \sum\limits_i \hat{k}_i^2 + \sum\limits_i \hat{\kappa}_i^2 = (\sum\limits_i \hat{k}_i)^2$, womit der Satz von Descartes bewiesen ist.

Folgerung: $\boxed{\hat{k}_4 = \hat{k}_1 + \hat{k}_2 + \hat{k}_3 \pm \sqrt{\hat{k}_1\hat{k}_2 + \hat{k}_1\hat{k}_3 + \hat{k}_2\hat{k}_3}}$

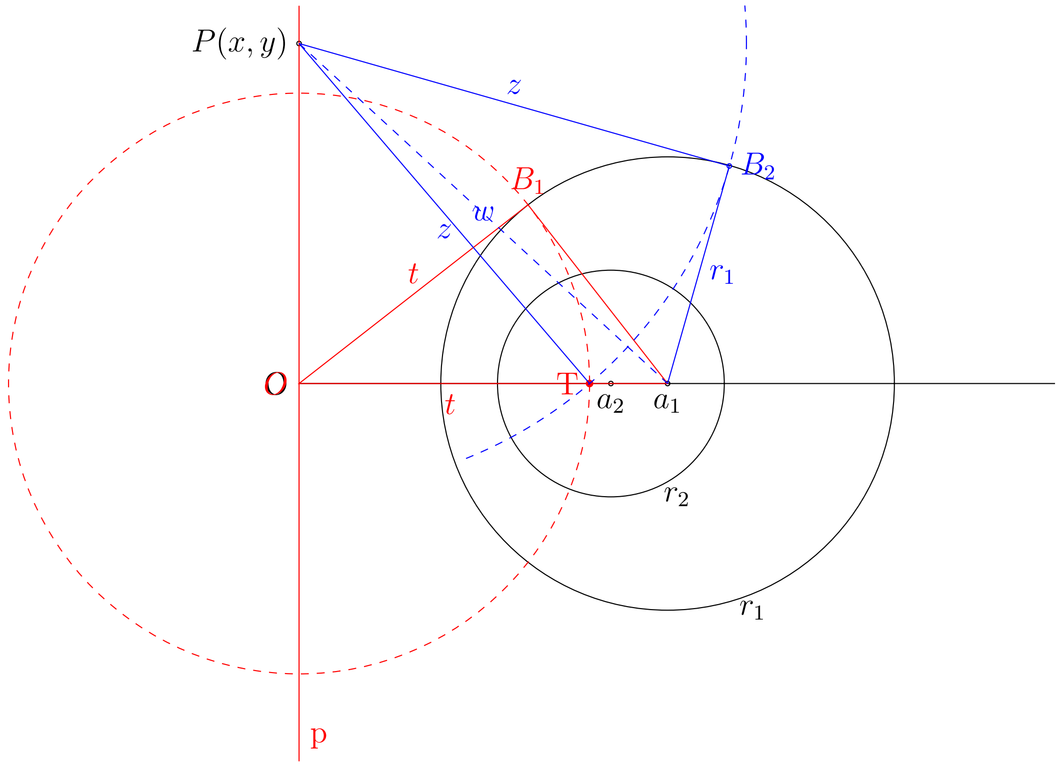
Für die Radien gilt $\boxed{r_4 = \dfrac{r_1 r_2 r_3}{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 \pm 2\sqrt{r_1 r_2 r_3 (r_1 + r_2 + r_3)}}}$

# 3 Die Potenzlinie zweier Kreise




Wir definieren für einen Kreis C und einen Punkt P die Potenz $\pi(C, P) = d^2 - r^2$ des Punktes P bezüglich C. Wenn P außerhalb des Kreises ist, gilt $\pi(C, P) > 0$, wenn P innerhalb des Kreises ist, gilt $\pi(C, P) < 0$ und wenn P auf dem Kreis liegt, gilt $\pi(C, P) = 0$. Zwei Punkte P und Q außerhalb des Kreises haben bezüglich C dieselbe Potenz, wenn ihre Tangentenabschnitte gleichlang sind.

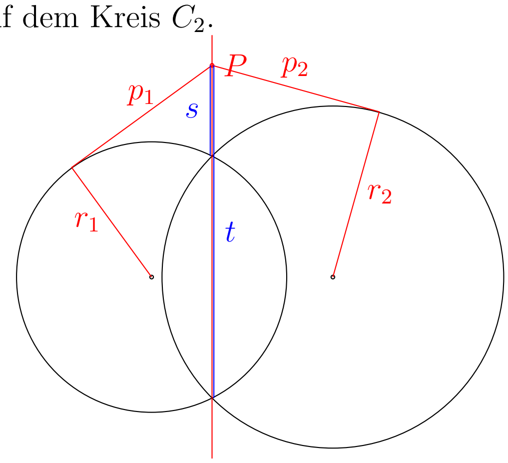
Wenn der Kreis $C$ durch die Gleichung $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0$ gegeben ist, gilt $\boxed{\pi(C, x) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2}$.

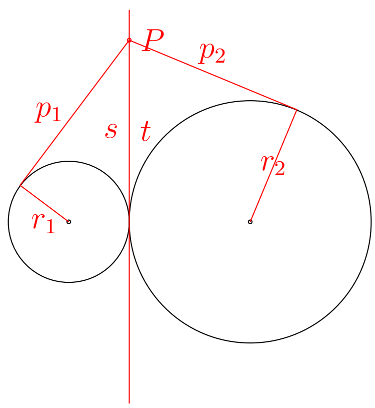



Wir betrachten nun zwei Kreise $C_1$ und $C_2$, sowie einen Punkt $P(x, y)$. Es gilt $\pi(C_1, P) = (x - a_1)^2 + y^2 - r_1^2$ und $\pi(C_2, P) = (x - a_2)^2 + y^2 - r_2^2$. Wir suchen nun den geometrischen Ort aller Punkte P mit $\pi(C_1, P) = \pi(C_2, P)$. Es gilt dann $(x - a_1)^2 + y^2 - r_1^2 = (x - a_2)^2 + y^2 - r_2^2$. Aufgelöst haben wir $\boxed{x = \frac{a_1 + a_2}{2} - \frac{r_1^2 - r_2^2}{2(a_1 - a_2)}}$. Dies ist eine Gerade, die auf der Verbindung der Mittelpunkte senkrecht steht. Den Schnittpunkt nennen wir O. Von O aus ziehen wir die Tangente $OB_1$ der Länge $t$. Wir klappen diese Strecke auf die Verbindungslinie der Mittelpunkte und gelangen so zum Punkt T.

Nun wählen wir einen beliebigen Punkt P der Potenzlinie und legen um P einen Kreis durch T. Dieser trifft den Kreis mit Radius $r_1$ im Punkt $B_2$. Es gilt $z = \overline{PT} = \sqrt{y^2 + t^2}$ und weiter $a_1 = \sqrt{t^2 + r_1^2}$. Damit gilt für die Strecke $w$ die Gleichung $w = \sqrt{y^2 + t^2 + r_1^2}$. Es gilt also die Beziehung $z^2 + r_1^2 = w^2$ und damit ist $PB_2$ eine Tangente.

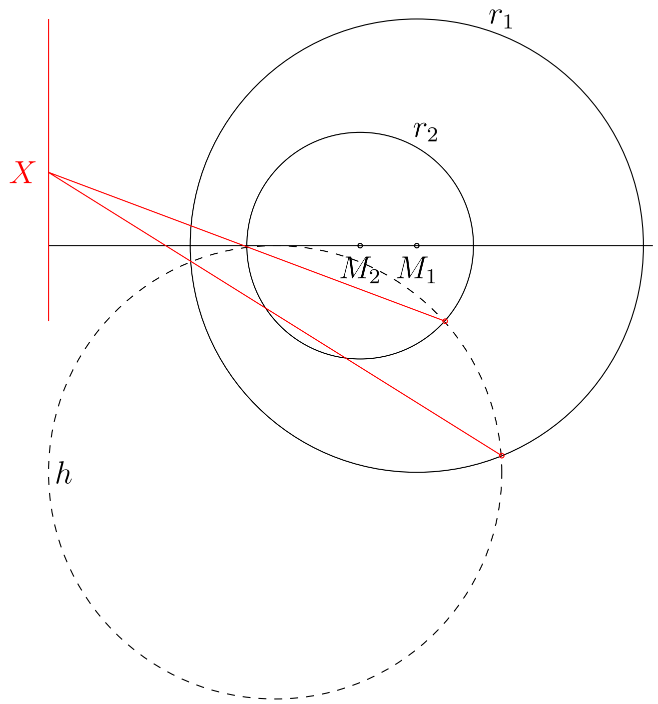
Wenn wir von P aus die Tangente an den Kreis $C_1$ ziehen, liegt der Tangentenberührpunkt $B_2$ auf einem Kreis um P mit dem Radius $\overline{PT}$. Dieser Kreis steht auf dem Kreis $C_1$ senkrecht. Da aber P auf der gemeinsamen Potenzlinie von $C_1$ und $C_2$ liegt, steht dieser Kreis auch senkrecht auf dem Kreis $C_2$.



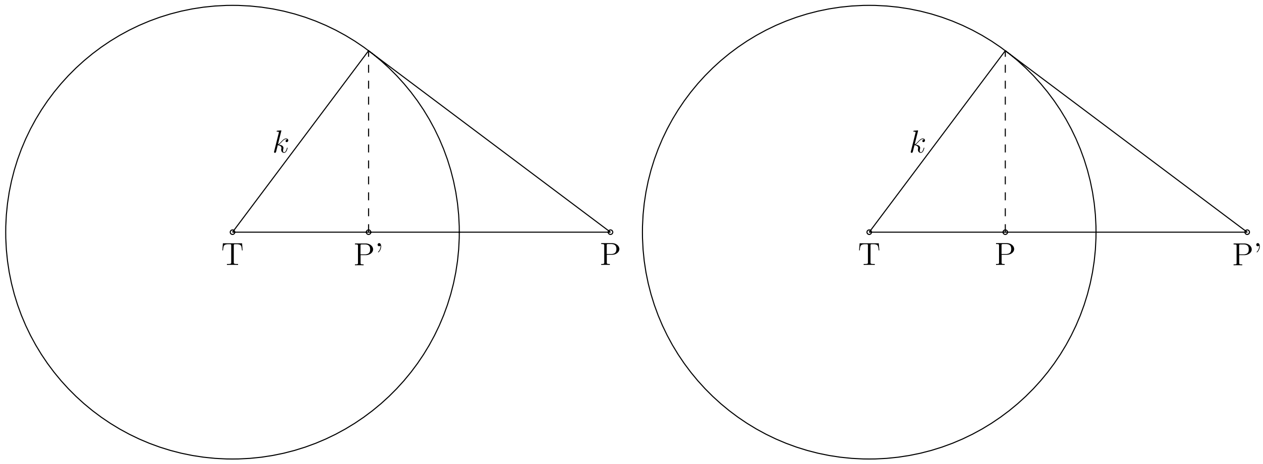
Wenn zwei Kreise sich schneiden, findet man die Potenzlinie viel einfacher. Es gilt $p_1^2 = st = p_2^2$ und damit ist die gemeinsame Sehne bereits die Potenzlinie.

Auch im Fall, dass sich zwei Kreise nicht schneiden, kann man mit dieser Methode die Potenzlinie ermitteln.




Wir wählen einen Hilfskreis $h$, der die beiden Kreise $C_1$ und $C_2$ schneidet. Die Potenzlinie von $C_1$ und $h$ und die Potenzlinie von $C_2$ und $h$ schneiden sich in einem Punkt $X$ der Potenzlinie von $C_1$ und $C_2$. Das Lot durch $X$ auf $M_1M_2$ liefert wieder die Potenzlinie.

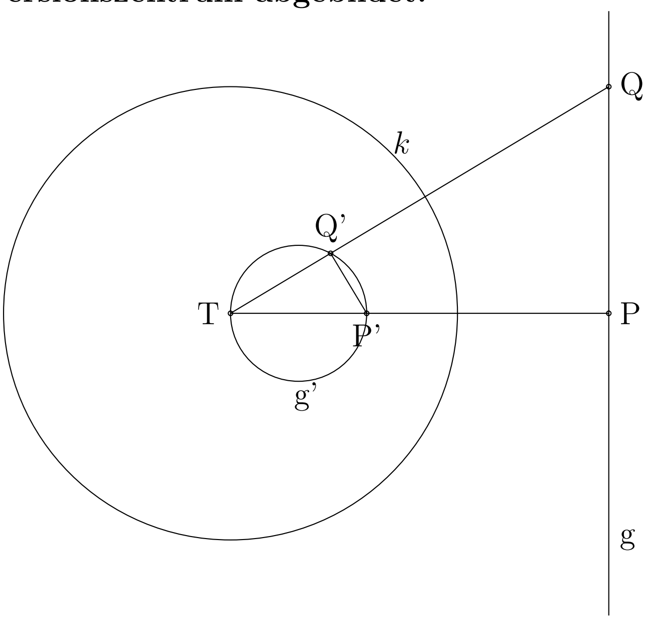
# 4 Die Kreisinversion




Wir haben einen festen Punkt T und einen festen Kreis mit Radius $k$ um T. Jedem Punkt P der Zeichenebene ohne T können wir einen Bildpunkt P' zuordnen mittels der oben dargestellten Konstruktion. Diese Abbildung nennt man Kreisinversion. Es gilt offenbar $\frac{\overline{TP}}{k} = \frac{k}{\overline{TP'}}$ oder umgeschrieben $\boxed{\overline{TP} \cdot \overline{TP'} = k^2}$. Die Kreisinversion ist offenbar eine involutorische Abbildung.

## 4.1 Lehrsatz

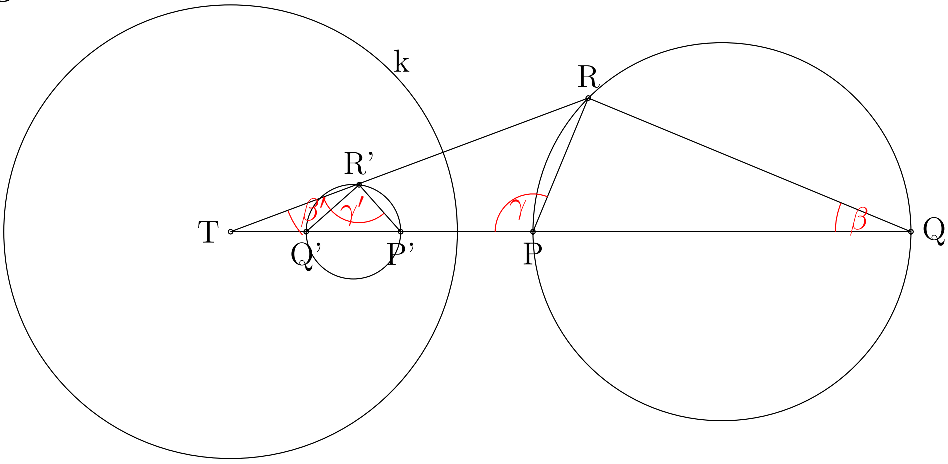
**Eine Gerade durch das Inversionszentrum wird in sich selbst abgebildet. Eine Gerade, die nicht durch das Inversionszentrum geht, wird in einen Kreis durch das Inversionszentrum abgebildet.**




Es sei P der Lotfußpunkt des Lotes von T auf g und Q ein weitere Punkt der Gerade g. Es gilt $\overline{TP} \cdot \overline{TP'} = k^2$ und $\overline{TQ} \cdot \overline{TQ'} = k^2$ und damit $\frac{\overline{TP}}{\overline{TQ}} = \frac{\overline{TQ'}}{\overline{TP'}}$. Damit sind die Dreiecke TPQ und TQ*P' ähnlich. Damit liegt aber Q auf dem Thaleskreis über TP'. Damit ist der Kreis durch P das Bild g'.

## 4.2 Lehrsatz

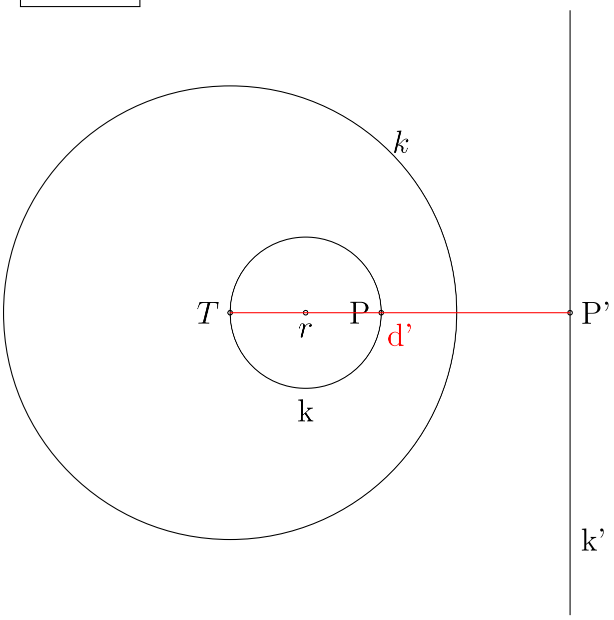
**Ein Kreis, der nicht durch das Inversionszentrum geht, wird in einen anderen Kreis abgebildet.**




Wir bestimmen die Kreispunkte P und Q, die in der Entfernung zu T extremal sind. Ein beliebiger Punkt R des Kreises liegt dann auf dem Thaleskreis über R. Es gilt $\overline{TR} \cdot \overline{TR'} = k^2$ und $\overline{TP} \cdot \overline{TP'} = k^2$. Es folgt $\frac{\overline{TR}}{\overline{TP}} = \frac{\overline{TP'}}{\overline{TR'}}$. Die Dreiecke TPR und TR'P' sind ähnlich und damit gilt $\gamma = \gamma'$. Es gilt auch $\overline{TQ} \cdot \overline{TQ'} = k^2$ und wir folgern $\frac{\overline{TR}}{\overline{TQ}} = \frac{\overline{TQ'}}{\overline{TR'}}$. Damit sind aber auch TQR und TR'Q' ähnlich und es gilt $\beta = \beta'$. Nun ist aber $\gamma = 90° + \beta$ und damit gilt $\sphericalangle P'R'Q' = 90°$ und R' ist auf dem Thaleskreis über Q'P' womit Satz B bewiesen ist.

## 4.3 Lehrsatz

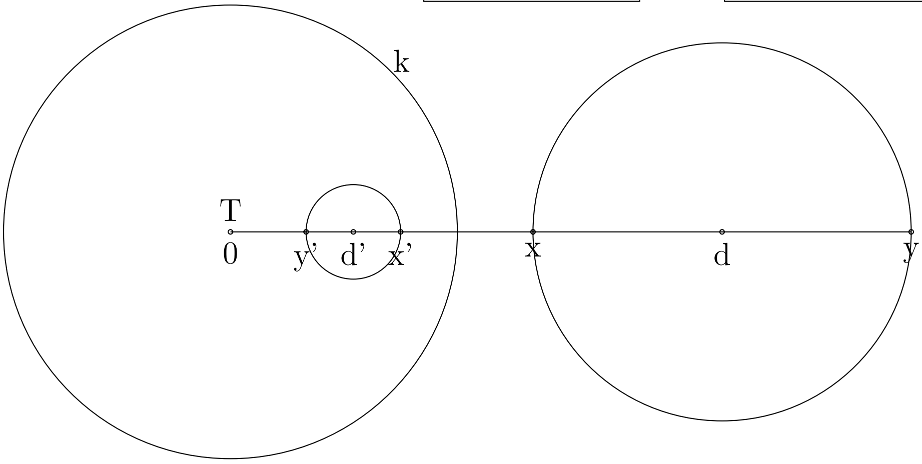
**Ein Kreis durch das Inversionszentrum wird auf eine Gerade abgebildet, die nicht durch das Inversionszentrum geht. Für den Abstand der Bildgerade vom Zentrum gilt** $\boxed{d' = \frac{k^2}{2r}}$**.**




Dass das Bild des Kreises eine Gerade wird ist von Satz A her bekannt. Wir betrachten die Punkte P und P'. Damit sehen wir $2r \cdot d' = k^2$ und damit gilt $d' = \frac{k^2}{2r}$, womit Satz C bewiesen ist.

## 4.4 Lehrsatz

**Ein Kreis C mit Radius $r$ im Abstand $d$ vom Inversionszentrum wird in einen Bildkreis C' mit Radius $r'$ mit Anstand $d'$ vom Inversionszentrum abgebildet. Dann gelten folgende Beziehungen:** $\boxed{r' = \frac{k^2}{|d^2 - r^2|} r}$ **und** $\boxed{d' = \frac{k^2}{|d^2 - r^2|} d}$.

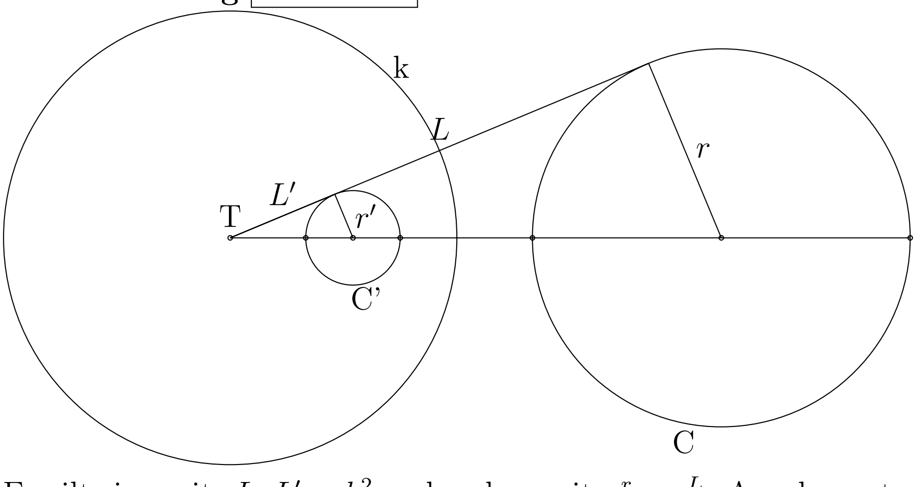



Es gelten die Beziehungen $xx' = k^2$, $yy' = k^2$, $\frac{y-x}{2} = r$, $\frac{x'-y'}{2} = r'$, $d = \frac{x+y}{2}$ und $d' = \frac{x'+y'}{2}$. Wir berechnen $d^2 - r^2 = (\frac{x+y}{2})^2 - (\frac{x-y}{2})^2 = xy$. Es gilt weiter $x' = \frac{k^2}{x}$ und $y' = \frac{k^2}{y}$, womit wir $2r' = x' - y' = \frac{k^2}{x} - \frac{k^2}{y} = \frac{k^2(y-x)}{xy} = \frac{2rk^2}{d^2-r^2}$ erhalten. Damit haben wir $r' = \frac{k^2}{|d^2-r^2|} r$.

Es gilt $d' = \frac{x'+y'}{2} = \frac{1}{2}(\frac{k^2}{y} + \frac{k^2}{x}) = \frac{k^2(x+y)}{2xy} = \frac{k^2 d}{xy} = \frac{k^2}{|d^2-r^2|} d$.

## 4.5 Lehrsatz

**Ein Kreis C vom Radius $r$ wird an einem Kreis um T mit Radius $k$ gespiegelt. Der Bildkreis C' hat den Radius $r'$. Die Länge der Tangente von T an C' sei $L'$. Dann gilt die Beziehung** $\boxed{rL'^2 = k^2 r'}$.




Es gilt einerseits $L \cdot L' = k^2$ und andererseits $\frac{r}{r'} = \frac{L}{L'}$. Aus der ersten Gleichung folgt $L = \frac{k^2}{L'}$ und mit der zweiten Gleichung erhalten wir $\frac{r}{r'} = \frac{k^2}{L'^2}$ oder $rL'^2 = k^2 r'$.

## 4.6 Lehrsatz

**Punkte auf dem Inversionskreis sind invariant.**

## 4.7 Lehrsatz

**Zum Inversionskreis konzentrische Kreis werden auf konzentrische Kreise abgebildet.**

## 4.8 Lehrsatz

**Der Mittelpunkt eines inversen Kreises ist nicht das Bild des Mittelpunktes des Ausgangskreises.**

Nach Lehrsatz 3.4 gilt $d' = \frac{k^2}{|d^2-r^2|}d$ und wir erhalten $dd' = \frac{k^2}{|d^2-r^2|}d^2$ und damit $dd' \neq k^2$.

## 4.9 Lehrsatz

**Wenn sich zwei Kreise im Inversionspunkt T berühren, sind ihre Bilder parallele Geraden. Wenn sich zwei Kreise in einem von Inversionspunkt verschiedenem Punkt berühren, berühren sich auch ihre Bilder.**

## 4.10 Lehrsatz

**Die Inversion erhält Winkel.**

Eine Kurve wird beschrieben durch $\vec{x}(t) = \binom{c_1(t)}{c_2(t)}$. Die Inversion wird durch die Gleichung $J(\vec{x}) = \frac{k^2}{x^2+y^2}\binom{x}{y}$. Wir bilden nun die Kurve durch Inversion ab und erhalten $\vec{y}(t) = \frac{r^2}{c_1^2+c_2^2}\binom{c_1}{c_2}$. Es gilt $\vec{y'}(t) = -\frac{k^2}{(c_1^2+c_2^2)^2}[2c_1c_1' + 2c_2c_2']\binom{c_1}{c_2} + \frac{k^2}{(c_1^2+c_2)^2}[c_1^2 + c_2^2]\binom{c_1'}{c_2'}$. Wir gruppieren nun um und erhalten $\vec{y'} = \frac{k^2}{c_1^2+c_2^2}\binom{-2c_1^2c_1'-2c_1c_2c_2'+c_1^2c_1'+c_2^2c_1'}{-2c_1c_2c_1'-2c_2^2c_2'+c_1^2c_2'+c_2^2c_2'} = \frac{k^2}{c_1^2+c_2^2}\binom{(c_2^2-c_1^2)c_1'-2c_1c_2c_2'}{(c_1^2-c_2^2)c_1'-2c_1c_2c_2'}$. Wir bringen dieses Ergebnis in Matrixform

$$\vec{y'} = \frac{1}{\gamma}\begin{pmatrix} c_2^2 - c_1^2 & -2c_1c_2 \\ -2c_1c_2 & c_1^2 - c_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = A \cdot \vec{x'}$$

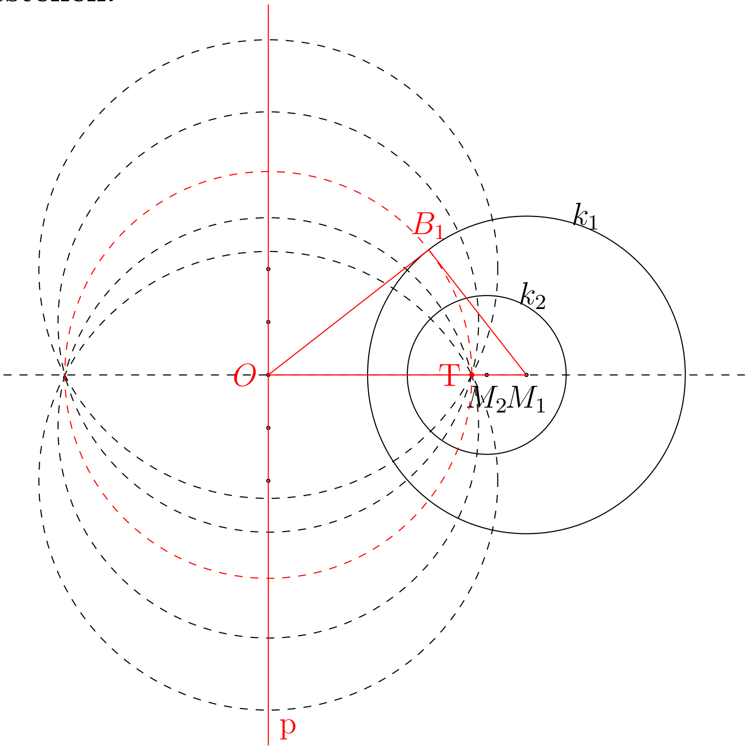
Nun sieht man sofort, dass die Abbildungsmatrix zu einer orthogonalen Matrix proportional ist. Diese Matrizen sind aber winkeltreu, womit die Aussage bewiesen ist. Man sieht aber auch, dass $\det(A) < 0$ gilt und damit ein Spiegelung dabei ist wegen $\gamma > 0$.

## 4.11 Lehrsatz

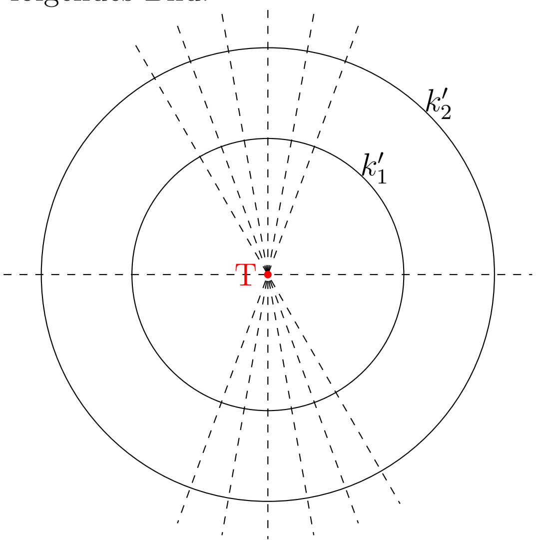
**Der Mittelpunkt eines Kreis, der Mittelpunkt des inversen Kreises und das Inversionszentrum sind kollinear.**

## 4.12 Lehrsatz

**Durch ein geeignetes Inversionszentrum können zwei Kreise, die sich nicht berühren, aber ineinander liegen so abgebildet werden, dass konzentrische Kreise entstehen.**




Für zwei Kreise $k_1$ und $k_2$ bestimmen wir die Potenzlinie $p$ und den Schnittpunkt $O$ von $M_1M_2$ und $p$. Wir konstruieren die Tangente $OB_1$ an $k_1$. Der Kreis um $O$ durch $B_1$ schneidet $M_1M_2$ im Punkt $T$. Alle Kreise um $Y \in p$ durch $T$ schneiden die Kreise $k_1$ und $k_2$ senkrecht. Wenn wir nun alle diese Kreise an einem Kreis um $T$ mit beliebigen Radius invertieren, erhalten wir folgendes Bild.




Damit haben wir die Kreise $k_1$ und $k_2$ auf die beiden konzentrischen Kreise $k_1'$ und $k_2'$ abgebildet, womit der Satz bewiesen ist.